

Números Enteros

Introducción

Todos los conjuntos de números $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ fueron de alguna manera "descubiertos" o sugeridos en conexión con problemas planteados en problemas físicos o en el seno de la matemática elemental y todos ellos parecen tener importantes conexiones con la realidad física.

\mathbb{N} representa el conjunto de los números naturales.

\mathbb{Z} representa el conjunto de los números enteros.

\mathbb{Q} representa el conjunto de los números racionales.

\mathbb{I} representa el conjunto de los números irracionales.

\mathbb{C} representa el conjunto de los números complejos.

Números naturales

Un **número natural** es cualquiera de los números que se usan para contar los elementos de un conjunto. Reciben ese nombre porque fueron los primeros que utilizó el ser humano para la enumeración.

Puesto que los números naturales se utilizan para contar objetos, el cero puede considerarse el número que corresponde a la ausencia de los mismos.

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$$

Números enteros y valor absoluto

El conjunto de los números enteros lo forman los enteros positivos, enteros negativos y el cero. Los signos + y - que llevan los números enteros no son signos de operaciones (suma, resta), sino que indican simplemente la cualidad de ser positivos o negativos.

Se llama **valor absoluto** de un número entero al número natural que resulta de prescindir del signo. Se expresa encerrando este número entre dos barras.

$$\text{Enteros } \mathbb{Z} \begin{cases} \mathbb{Z}^+ \text{ positivos: } +1, +2, +3, \dots \\ \mathbb{Z}^- \text{ negativos: } -1, -2, -3, \dots \end{cases} \Rightarrow \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^+ \cup \mathbb{Z}^- \cup \{0\}$$

$$\text{Valor absoluto } \rightarrow |-6|=6 \quad |6|=6 \quad |-1|=1 \quad |2|=2$$

Operaciones con números enteros

1) Suma de números enteros.

a) **Cuando los números enteros tienen el mismo signo:** se suman los valores y se deja el signo que tengan, si son positivos signo positivo y si son negativos signo negativo. Si no se pone nada delante del número se entiende que es +:

$$(+5) + (+4) = +9 \quad \text{es lo mismo que: } 5 + 4 = 9$$

$$(-5) + (-4) = -9 \quad \text{es lo mismo que: } -5 - 4 = -9$$

b) Cuando los números enteros tienen distinto signo: se restan sus valores absolutos y se pone el signo del sumando de mayor valor absoluto. (Se restan y se deja el signo del más grande en valor absoluto):

$$(+20) + (-10) = 20 - 10 = +10 \quad (20 - 10 = 10, \text{ el más grande es } +20, \text{ se pone } +10)$$

$$(-8) + (+3) = -8 + 3 = -5 \quad (8 - 3 = 5, \text{ el más grande es el } -8, \text{ se pone } -5)$$

$$(+11) + (-2) = 11 - 2 = +9 \quad (11 - 2 = 9, \text{ el más grande es el } 11, \text{ se pone } +9)$$

2) Producto y Cociente de números enteros: regla de los signos

Producto					Cociente				
+	×	+	=	+	+	÷	+	=	+
-	×	-	=	+	-	÷	-	=	+
+	×	-	=	-	+	÷	-	=	-
-	×	+	=	-	-	÷	+	=	-

a) Para multiplicar dos números enteros se multiplican sus valores absolutos y se aplica la regla de los signos. Cuando van dos signos seguidos hay que separarlos utilizando paréntesis:

$$-(+8) \cdot (+3) = -24$$

$$-(-3) \cdot (-2) = -6$$

$$-(+4) \cdot (-1) = 4$$

$$-(-2) \cdot (+4) = 8$$

b) Para dividir dos números enteros se divide el dividendo entre el divisor y se aplica la regla de los signos:

$$(-15) : (-15) = +1$$

$$8 : 4 = +2$$

$$-4 : (-2) = +2$$

$$10 : (-2) = -5$$

Múltiplos de un número

Los múltiplos de un número se obtienen multiplicando ese número por los números naturales, por lo que existen infinitos múltiplos de un número.

Normalmente se piden algunos múltiplos de un número:

1) Múltiplos de 5 menores de 50.

$$5 \times 1 = 5$$

$$5 \times 2 = 10$$

$$5 \times 3 = 15$$

$$5 \times 4 = 20$$

$$5 \times 5 = 25$$

$$5 \times 6 = 30$$

$$5 \times 7 = 35$$

$$5 \times 8 = 40$$

$$5 \times 9 = 45$$

2) Múltiplos de 3 entre 30 y 40.

$$3 \times 10 = 30$$

$$3 \times 11 = 33$$

$$3 \times 12 = 36$$

$$3 \times 13 = 39$$

Divisores de un número

Un número es divisor de otro si lo divide exactamente, es decir, el resto de la división de uno entre el otro es cero.

1) ¿Es 4 divisor de 20? Dividimos 20 entre 4 y nos sale:

$$\begin{array}{r} 20 \text{ } | 4 \\ 0 \text{ } 5 \end{array}$$

El resto es cero, por lo que 4 es divisor de 20.

Criterios de divisibilidad

Un número es **divisible por 2** si es par. Ejemplo: 24, 238, 1024...

Un número es **divisible por 3** si el resultado de sumar todas sus cifras es múltiplo de 3. Ejemplo: 564, $5 + 6 + 4 = 15$ (múltiplo de 3).

Un número es **divisible por 5** si acaba en 0 ó en 5. Ejemplo: 45, 515...

Un número es **divisible por 7** si la diferencia entre el número sin las unidades y el doble de estas es 0 ó múltiplo de 7. Ejemplo: 343, $34 - 2 \cdot 3 = 28$ (múltiplo de 7).

Un número es **divisible por 11** si la diferencia entre la suma de las cifras que ocupan los lugares pares y las que ocupan las impares es 0 ó múltiplo de 11. Ejemplo: 121, $(1 + 1) - 2 = 0$.

Múltiplos de un número

Se obtienen dividiendo el número por sus divisibles.

1) Hallar los múltiplos de 30. Es múltiplo de 2, pues es par. Es múltiplo de 3, pues $3 + 0 = 3$. Y es múltiplo de 5, pues acaba en 0. Esto se realiza:

$$\frac{30}{2} = 15$$

$$\frac{15}{5} = 3$$

$$\frac{3}{3} = 1$$

O bien:

$$\begin{array}{r|l} 30 & 2 \\ 15 & 5 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

Mínimo común múltiplo

El mínimo común múltiplo (m.c.m.) de dos números es el menor de los múltiplos distinto de cero que dichos números tienen en común.

1) ¿Cuál es el mínimo común múltiplo de 6 y 9?

$$\left. \begin{array}{l} 6 = 2 \cdot 3 \\ 9 = 3 \cdot 3 = 3^2 \end{array} \right\} m.c.m. = 2 \cdot 3^2 = 18$$

Se forma con los números **comunes** con mayor exponente y los **no comunes**.

1) Resuelve:

- a) $3 - 2 + 5 + 3 + 2 + 7 + 1 - 2 =$
- b) $22 - 12 - 3 + 5 + 6 - 7 - 8 + 4 =$
- c) $3 - 2 - 3 - 4 - 5 - 6 - 7 =$
- d) $31 - 24 - 12 + 45 - 22 + 6 =$
- e) $90 - 56 + 2 - 24 - 13 =$
- f) $11 - 13 - 2 + 56 =$

2) Determina:

- a) $(3 - 2) + (5 + 3) + 2 + (7 + 1 - 2) =$
- b) $5 + 7 + (7 - 3) + (2 + 56) + 3 =$
- c) $(25 - 11 + 2) + 3 + 5 + 2 + (7 - 2) =$
- d) $(45 - 23) + (67 - 89 + 45) + 34 + (3 + 5) =$
- e) $23 + (32 - 11) + (8 + 45) + 5 + 8 + (34 - 23) + (45 - 3) =$

3) Resuelve:

- a) $(3 - 2) - [(5 + 3) + 2] - (7 + 1 - 2) =$
- b) $[5 - 7 + (7 - 3)] - (2 + 56) + 3 =$
- c) $(25 - 11 + 2) + [3 + 5 + 2 - (7 - 2)] =$
- d) $(45 - 23) - [(67 - 89 + 45) + 34] - (3 + 5) =$
- e) $23 + (32 - 11) - [(8 + 45) + 5 + 8 + (34 - 23)] - (45 - 3) =$

4) Opera:

- a) $2 \cdot (3 + 5) - (8 - 1) + (-1) \cdot (3 + 1) - 8 =$
- b) $2 \cdot (3 - 2) \cdot - (5 + 3) + 2 - 5 \cdot (7 + 1 - 2) =$
- c) $5 - 7 + 3 \cdot (7 - 3) - 2 \cdot (2 + 56) + 3 =$
- d) $(-1) \cdot (25 - 11 + 2) + 3 + 5 + 2 - (7 - 2) =$
- e) $(45 - 23) - 5 \cdot (67 - 89 + 45) + 34 - 2 \cdot (3 + 5) =$
- f) $23 + (-1) \cdot (32 - 11) - (8 + 45) + 5 + 8 + 3 \cdot (34 - 23) - (45 - 3) =$
- g) $[9 - 5 \cdot (8 : 2 + 1)] + 6 =$
- h) $(-3 + 7) : (10 - 11) - (-5 + 6) =$

5) Determina:

- a) $(-8 + 7) : (10 - 11) \cdot (3 - 6) =$
- b) $(-10 - 2 - 1) : (+8 + 5) =$
- c) $-5 - 10 + (-7 + 3 + 7) \cdot (-20 : 10) =$
- d) $[8 : 2 \cdot (9 + 6)] : 5 =$
- e) $-20 - 15 + (-3 + 4 + 7) : 2 - (-2 + 1 + 20) =$

6) Escribe los múltiplos:

- a) De 7 menores que 50.
- b) De 4 mayores que 10 y menores que 30.

7) Completa esta tabla con los 10 primeros múltiplos de los números de la primera columna:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	3	6								
6										
9			27							
11							77			
13			39							
20										

8) Indica si son verdaderas (V) o falsas (F) estas afirmaciones y justifica tu respuesta:

- a) 181 es múltiplo de 14.
- b) 18 es divisor de 54.
- c) 195 es múltiplo de 13.
- d) 9 es divisor de 48.

9) Entre los siguientes números señala los que sean divisibles por 2: 4, 7, 10, 21, 32, 47, 52, 103, 781 y 896.

10) Indica cuales de estos números son divisibles por 3: 8, 21, 78, 128, 761, 1204, 3921, 4021, 1002 y 10224.

11) Indica si los siguientes números son divisibles por 2, 3, 5 ó 10 y justifica por qué: 84, 387, 441, 1025 y 8875893240.

12) Halla el m.c.m. de las parejas de números que se indican:

- a) 21 y 49.
- b) 60 y 66.
- c) 49 y 99.
- d) 36 y 80.

13) Halla el m.c.m. en cada caso:

- a) 60 y 150
- b) 72 y 252.
- c) 210 y 990.
- d) 140 y 264.

14) En una carrera de fondo de 50 km hay un puesto de agua cada 4 km y un control de los corredores cada 3 km. ¿En qué puntos kilométricos coincidirán el puesto de agua y el control?

15) Por una misma parada pasan los autobuses de la línea A cada 5 minutos y los de la línea B cada 8 minutos. Si a las 12 en punto han coincidido los de las dos líneas, ¿cuándo volverán a coincidir?

16) Jaime cuenta sus cromos de 2 en 2, de 4 en 4 y de 6 en 6 y no le sobra nunca ninguno. ¿Cuántos cromos tiene Jaime si son entre 30 y 40 cromos?