Números Reales

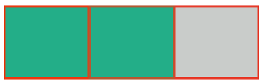
Concepto de fracción

Una **fracción** es el **cociente** de **dos números enteros** a y b, que representamos de la siguiente forma:

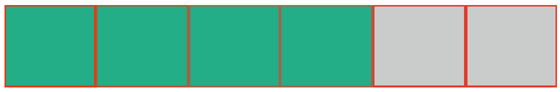
$$\frac{a}{b} \qquad \text{siendo } b \neq 0$$

b, ***denominador***, indica el número de partes en que se ha dividido la unidad.
a, **numerador**, indica el número de unidades fraccionarias elegidas.

Representación de fracciones:



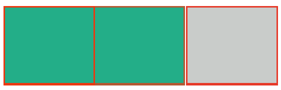
$\frac{2}{3}$



$\frac{4}{6}$

La fracción como partes de la unidad

El todo se toma como unidad. La **fracción** expresa un **valor** con relación a ese todo. Ejemplo:



Un depósito contiene 2/3 de gasolina.

El todo: el depósito. La **unidad** equivale a **3/3**, en este caso; pero en general sería una **fracción** con el mismo número en el numerador y el denominador.
2/3 de gasolina expresa la relación existente entre la gasolina y la capacidad del depósito. De sus tres partes dos están ocupadas por gasolina.

La fracción como cociente

Repartir 4 € entre 5 amigos: $\frac{4}{5} = 0{,}8\ €$

Fracciones propias

Las **fracciones propias** son aquellas cuyo **numerador** es **menor** que el **denominador**. Su valor comprendido entre cero y uno.

$$\frac{2}{3}, \quad \frac{3}{5}, \quad \frac{7}{10}$$

Fracciones impropias

Las **fracciones impropias** son aquellas cuyo **numerador** es **mayor** que el **denominador**. Su valor es mayor que 1.

$$\frac{5}{3}, \quad \frac{7}{5}, \quad \frac{13}{10}$$

Fracciones decimales

Las **fracciones decimales** tienen como **denominador** una **potencia de 10**.

$$\frac{23}{100}, \qquad \frac{12}{1000}, \qquad \frac{3}{10}$$

Fracciones equivalentes

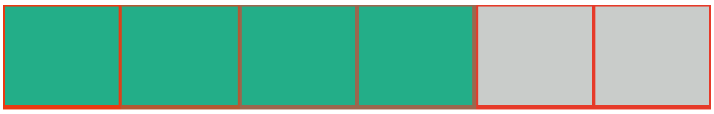
Dos **fracciones** son **equivalentes** cuando el **producto de extremos** es **igual al producto de medios**.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \qquad si \qquad a \cdot d = b \cdot c$$

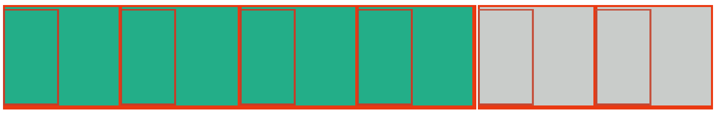
a y d son los extremos; b y c, los medios.
Calcula si son equivalentes las fracciones:

$$\frac{4}{6} \text{ y } \frac{8}{12}$$

$4 \cdot 12 = 6 \cdot 8 \qquad 48 = 48 \qquad$ Sí



$\frac{4}{6}$



$\frac{8}{12}$

Si se multiplica o divide el numerador y denominador de una fracción por un número entero, distinto de cero, se obtiene otra fracción equivalente a la dada.
Al primer caso le llamamos ampliar o amplificar.

$$\frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 5} = \frac{10}{15} \qquad \frac{2}{3} = \frac{10}{15} \qquad 2 \cdot 15 = 3 \cdot 10 \quad 30 = 30$$

Simplificar fracciones

Simplificar una **fracción** es transformarla en una **fracción equivalente** más simple.
Para **simplificar** una **fracción dividimos numerador y denominador** por un **mismo número**.
Empezaremos a **simplificar** probando por los primeros **números primos**: 2, 3, 5, 7... Es decir, probamos a **dividir numerador y denominador** entre **2** mientras se pueda, después pasamos al **3** y así sucesivamente.
Se repite el proceso hasta que no haya más divisores comunes.

Si los términos de la **fracción** terminan en **ceros**, empezaremos quitando los **ceros comunes** finales del **numerador y denominador**.
Si el número por el que dividimos es el **máximo común denominador** del **numerador y denominador** llegamos a una **fracción irreducible**.

$$\frac{8:4}{36:4}=\frac{2}{9} \qquad \frac{8}{36}=\frac{2}{9} \qquad 8\cdot 9=36\cdot 2 \quad 72=72$$

Fracciones irreducibles

Las **fracciones irreducibles** son aquellas que **no** se pueden **simplificar**, esto sucede cuando el **numerador y el denominador** son **primos** entre sí:

$$\frac{5}{7}, \quad \frac{6}{13}, \quad \frac{2}{5}$$

Suma y recta de fracciones

Para sumar fracciones con el mismo denominador, se suman sus numeradores y se mantiene el denominador.

$$\frac{3}{2}+\frac{7}{2}=\frac{3+7}{2}=\frac{10}{2}=5$$

Cuando las fracciones tienen distinto denominador se utiliza el m.c.m. para obtener fracciones equivalentes con el mismo denominador:

$$\frac{3}{2}+\frac{7}{5}=\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{5}+\frac{7}{5}\cdot\frac{2}{2}=\frac{15}{10}+\frac{14}{10}=\frac{29}{10}$$

Lo mismo ocurre si restamos:

$$\frac{3}{2}-\frac{7}{5}=\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{5}-\frac{7}{5}\cdot\frac{2}{2}=\frac{15}{10}-\frac{14}{10}=\frac{1}{10}$$

Producto y cociente de fracciones

El producto de dos fracciones es otra fracción cuyo numerador es el producto de los numeradores y el denominador es el producto de los denominadores:

$$\frac{A}{B}\cdot\frac{C}{D}=\frac{A\cdot C}{B\cdot D}$$

El cociente (división) de dos fracciones es otra fracción que tiene por numerador el producto de los extremos, y por denominador el producto de los medios:

$$\frac{A}{B}:\frac{C}{D}=\frac{A\cdot D}{B\cdot C}$$

Proporciones directas e inversas

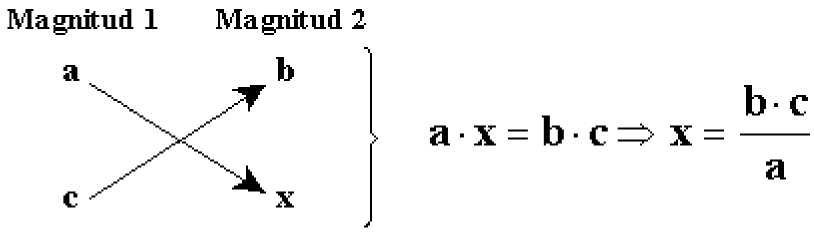
Proporcionalidad directa. Dadas dos variables x e y, siendo y directamente proporcional a x si hay una constante k, distinta de cero, tal que:

$$y = k \cdot x$$

Llamándose a k **constante de proporcionalidad**:

$$k = \frac{y}{x} = \frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \ldots = \text{constante}$$

Esta se relaciona con la regla de tres simple directa:



Ejemplos:

1) Un cargamento de papas pesa 520 kg, ¿cuántos sacos de 20 kg se podrán hacer?

2) En 50 litros de agua de mar hay 1300 g de sal. ¿Cuántos litros de agua de mar contendrán 5200 g de sal?

Porcentajes (tanto por ciento). Es un tipo de regla de tres en el que una de las cantidades es 100. Se representa mediante el símbolo **%**.

$$\% = \frac{\text{cantidad tomada}}{\text{cantidad total}} \cdot 100$$

Ejemplos:

3) ¿Qué porcentaje es 40 de un total de 120?

4) Determina el 20% de 80.

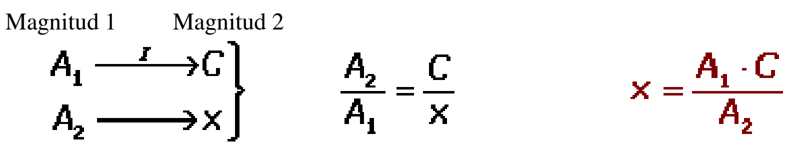
5) Si el 20% de una cierta cantidad total es 120. ¿Cuál es el total?

6) El precio de un ordenador es de 1200 € sin IVA. ¿Cuánto hay que pagar por él si el IVA es del 16%?

Proporcionalidad inversa. Dos variables son inversamente proporcionales si se cumple la ecuación:

$$y = \frac{k}{x}$$

Esta se relaciona con la regla de tres inversa:



Ejemplos:

7) Un ganadero tiene forraje suficiente para alimentar 220 vacas durante 45 días. ¿Cuántos días podrá alimentar con la misma cantidad de forraje a 450 vacas?

8) Para envasar cierta cantidad de vino se necesitan 8 toneles de 200 L de capacidad cada uno. Queremos envasar la misma cantidad de vino empleando 32 toneles. ¿Cuál deberá ser la capacidad de esos toneles?

9) 3 obreros construyen un muro en 12 horas, ¿cuánto tardarán en construirlo 6 obreros?

Potencias

Una **potencia** es el producto que resulta al multiplicar una cantidad o expresión por sí misma una o más veces:

$$2 \cdot 2 = \mathbf{2^2}$$
$$2 \cdot 2 \cdot 2 = \mathbf{2^3}$$
$$\ldots$$

$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \cdots = \mathbf{2^n}$, donde n es un número entero.

Propiedades de las potencias:

1) $a^0 = 1$

2) $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

3) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

4) $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

5) $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

6) $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

7) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$

Proporcionalidad exponencial

Una variable y es proporcionalmente exponencial a una variable x, si es directamente proporcional a la función exponencial de x:

$$y = k \cdot a^x$$

Siendo k y a constantes y distintas de cero.

Números racionales e irracionales

Los números enteros y los números fraccionarios forman el **conjunto de números racionales**. Existen otros números que no se pueden expresar ni de forma exacta, ni por una fracción, son los llamados **números irracionales**.

El número $\sqrt{2}$ es **irracional**, pues no es entero y su expresión decimal no es exacta ni periódica.

En general, si la raíz n-ésima de un número no es exacta, entonces es **irracional**: $\sqrt{5}, \sqrt[3]{4}, \sqrt[4]{100}, \sqrt[5]{1000}$.

Existen infinitos números irracionales, y sus expresiones requieren infinitas cifras no peródicas. Algunos de estos son: las raíces no exactas, π , phi (φ o ϕ)…

π es la relación entre la longitud de una circunferencia y su diámetro, en geometría euclidiana. Es una de las constantes matemáticas más importantes. Se emplea frecuentemente en matemáticas, física e ingeniería. El valor numérico de π, truncado a sus primeras cifras, es el siguiente:

$$\pi \approx 3{,}14159265358979323846\ldots$$

Phi (ϕ o ϕ), **número áureo** o de **oro**:

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618033988749894848\mathbf{2}$$

Posee muchas propiedades interesantes y que fue descubierto en la antigüedad, no como “unidad” sino como relación o proporción entre segmentos de rectas. Esta proporción se encuentra tanto en algunas figuras geométricas como en la naturaleza. Puede hallarse en elementos geométricos, en las nervaduras de las hojas de algunos árboles, en el grosor de las ramas, en el caparazón de un caracol, en los flósculos de los girasoles… Asimismo, se atribuye un carácter estético a los objetos cuyas medidas guardan la proporción áurea. Algunos incluso creen que posee una importancia mística. A lo largo de la historia, se ha atribuido su inclusión en el diseño de diversas obras de arquitectura y otras artes, aunque algunos de estos casos han sido cuestionados por los estudiosos de las matemáticas y el arte.

Números racionales

1) Agrupa entre las siguientes fracciones las que sean equivalentes:

$$\frac{10}{15} \quad \frac{5}{7} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{5}{15} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{2}{6} \quad \frac{15}{21}$$

2) Calcula:

a) $\frac{2}{3}$ de 60 b) $\frac{3}{4}$ de 100 c) $\frac{3}{500}$ de 500

3) Simplifica:

a) $\frac{30}{42}$ b) $\frac{18}{72}$ c) $\frac{75}{125}$ d) $\frac{60}{210}$ e) $\frac{2000}{4000}$

4) Calcula:

a) $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=$

b) $\frac{2}{5}+\frac{5}{3}-\frac{4}{3}=$

c) $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=$

d) $1-\frac{2}{3}=$

e) $\frac{17}{5}-3=$

5) Determina:

a) $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}=$

b) $\frac{3}{4}+2=$

c) $\frac{2}{3}-\frac{5}{6}=$

d) $\frac{5}{8}-\frac{11}{10}=$

6) Calcula:

a) $\frac{7}{2}-\frac{14}{7}=$

b) $\frac{1}{30}-\frac{1}{45}=$

c) $\frac{2}{9}+\frac{7}{9}-3=$

d) $\frac{5}{6}+\frac{1}{9}+\frac{3}{4}=$

e) $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}=$

f) $\frac{11}{30}-\frac{3}{40}-\frac{7}{60}=$

g) $\frac{2}{3}-1+\frac{5}{4}=$

h) $85-\frac{2}{8}+10=$

7) Determina:

a) $\frac{3}{2}-2+\frac{1}{3}=$

b) $3-\left(\frac{1}{6}+\frac{2}{3}\right)=$

c) $5-\left(\frac{1}{3}-2\right)=$

d) $\left(2-\frac{2}{3}\right)+\left(5-\frac{7}{2}\right)=$

8) Calcula y simplifica:

a) $\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{3} =$

b) $6 \cdot \frac{3}{4} =$

c) $5 : \frac{3}{4}$

d) $\frac{1}{3} \cdot \frac{4}{5} =$

e) $\frac{8}{3} : \frac{2}{3} =$

f) $\frac{2}{7} : 4 =$

9) Reduce:

a) $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} - \frac{1}{16} =$

b) $\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6} - \frac{1}{3}\right) =$

c) $5 : \left(\frac{2}{4} + 1\right) - 3 : \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right)$

d) $\dfrac{\frac{1}{4} - \frac{3}{5}}{\frac{7}{10} - \frac{3}{4}} =$

10) Comprueba que el resultado de estas operaciones es un número entero:

a) $\left(\frac{1}{6} - 1\right) \cdot \left(3 - \frac{2}{5}\right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) =$

b) $2 : \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\right) - 3 : \left(1 + \frac{1}{2}\right) =$

c) $-\frac{3}{8} \cdot \left[1 - \frac{3}{5} - \left(\frac{17}{20} - 1\right) \cdot \left(\frac{1}{3} - 3\right)\right]$

d) $\left[\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{9}\right) + 13\left(\frac{2}{3} - 1\right)^2\right] : \left(\frac{1}{3} - 1\right) =$

11) Calcula las siguientes potencias:

a) $(-2)^4 =$

b) $(-2)^3 =$

c) $-2^2 =$

d) $-2^{-3} =$

e) $(-2)^{-2} =$

f) $(-2)^{-3} =$

12) Expresa como potencia única:

a) $(2^2 \cdot 2^{-3})^{-4} =$

b) $\left(\frac{2}{5}\right)^2 : \left(\frac{2}{5}\right)^{-1} =$

c) $\left(\frac{1}{2}\right)^3 : \left(\frac{1}{2}\right)^5 =$

d) $\frac{3^5 \cdot 3^{-7}}{3^2} =$

e) $\frac{2^4 \cdot 4^{-2}}{8^2} =$

f) $\frac{2^{-5} \cdot 4^2 \cdot 3^2}{2^3 \cdot 9^{-1}} =$

13) Reduce:

a) $\frac{-3^2}{(-3)^2} =$

b) $\left[\left(\frac{1}{2}\right)^3\right]^2 =$

c) $\left(\frac{2}{5}\right)^2 : \left(\frac{2}{5}\right)^3 =$

d) $\left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{-3}{2}\right)^4 =$

e) $\left(\frac{1}{3}\right)^3 : \left(\frac{1}{4}\right)^2 =$

f) $\frac{3 \cdot (-3)^2 \cdot 4^2}{6^3 \cdot 9^2} =$

14) Simplifica:

a) $\frac{2^3 \cdot (-3)^2 \cdot 4^2}{6^3 \cdot 9^2} =$

b) $\frac{3 \cdot 2^{-4} \cdot 4^2 \cdot 9^{-1}}{2^{-5} \cdot 8 \cdot 3^2 \cdot 9} =$

15) Calcula:

a) $\left[\left(\frac{1}{2} - 1\right)^3\right]^2 =$

b) $\left[\left(\frac{1}{6} - \frac{2}{3}\right)^{-1}\right]^{-5} =$

c) $\left(\frac{3}{2} - \frac{3}{4}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{7}{9}\right)^{-1} =$